

# **PRÓBNA MATURA z WSiP**

---

Egzamin maturalny z matematyki dla klasy 2

Poziom rozszerzony

Kwiecień 2018

---

## **Zasady oceniania zadań**



## Kartoteka

Numer zadania	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe Uczeń:	Maksymalna liczba punktów
1	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	używa wzorów skróconego mnożenia (2.1r)	1
2	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y =  f(x) $ (4.1r)	1
3	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	stosuje wzory Viète'a (3.1r)	1
4	IV. Użycie i tworzenie strategii	stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów (6.5r)	1
5	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (7.1r)	1
6	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym (5.1r)	1
7	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	określa funkcje za pomocą wzoru (4.1p)	2
8	IV. Użycie i tworzenie strategii	oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów (10.9G)	2
9	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	dodaje odejmuje i mnoży wielomiany (2.4r)	3
10	V. Rozumowanie i argumentacja	stosuje wzór na $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego (5.3p)	3
11	IV. Użycie i tworzenie strategii	posługuje się równaniem okręgu (8.5r)	3
12	IV. Użycie i tworzenie strategii	rozwiązuje równania kwadratowe (3.4p)	3
13	V. Rozumowanie i argumentacja	znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów (7.5r)	3
14	V. Rozumowanie i argumentacja	rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem (3.2r)	6
15	IV. Użycie i tworzenie strategii	rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (6.6r)	6
16	IV. Użycie i tworzenie strategii	wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu ilorazu (1.6p)	6
17	III. Modelowanie matematyczne	wyznacza wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej (4.11p)	7

**Schemat oceniania zadań zamkniętych**

Numer zadania	1	2	3	4	5	6
Poprawna odpowiedź	B	A	C	D	A	D
Punktacja	0–1	0–1	0–1	0–1	0–1	0–1

Za każdą poprawną odpowiedź – **1 punkt**.

**Schemat oceniania zadań z kodowaną odpowiedzią**

Numer zadania	7	8
Poprawna odpowiedź	1, 1, 9	5, 2, 5
Punktacja	0–2	0–2

Za poprawne zakodowanie liczby – **2 punkty**.

**Zadanie 7. (0–2)****Przykładowe rozwiązanie**

Wyznaczamy wzór funkcji  $f$ .

$f(x) = ax + b$ , stąd  $f(2x+1) = a(2x+1) + b = 2ax + a + b$ . Ponieważ  $f(2x+1) = -\frac{2}{3}x + 1$  mamy

$$\begin{cases} 2a = -\frac{2}{3} \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Wzór funkcji  $f$  ma zatem postać  $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ . Obliczamy  $f\left(\frac{3}{7}\right)$ .

$$f\left(\frac{3}{7}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{7} + \frac{4}{3} = -\frac{3}{21} + \frac{28}{21} = \frac{25}{21} = 1,1904\dots$$

Należy zakodować kolejno cyfry 1, 1, 9.

**Zadanie 8. (0–2)****Przykładowe rozwiązanie**

Przyjmujemy oznaczenia –  $a$  długość boku rombu,  $c$  i  $d$  długości przekątnych tego rombu.

Z warunków zadania mamy

$$4a = 20, \text{ stąd } a = 5 \text{ oraz } c + d = 11.$$

Ostatnie z tych równań podnosimy obustronnie do kwadratu tu:

$$(c + d)^2 = 121$$

$$c^2 + 2cd + d^2 = 121$$

$$\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}cd = \frac{121}{4}.$$

Ponieważ w rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym i połowią się, mamy

$$\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 = a^2, \text{ stąd } \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 = 25. \text{ Zatem otrzymujemy } 25 + \frac{1}{2}cd = \frac{121}{4}$$

$$\frac{1}{2}cd = \frac{21}{4} = 5,25.$$

Pole rombu wyraża się wzorem  $P = \frac{1}{2}cd$ , zatem należy zakodować kolejno cyfry 5, 2, 5.

### Schemat oceniania zadań otwartych

#### UWAGA OGÓLNA

- Za prawidłowe rozwiązanie zadania inną metodą niż przewidziana w schemacie punktowania należy przyznać zdającemu maksymalną liczbę punktów.
- Za częściowe rozwiązanie zadania inną metodą niż przewidziana w schemacie rozwiązania należy przyznać zdającemu liczbę punktów adekwatną do wykonanych czynności.

#### Zadanie 9. (0–3)

##### Przykładowe rozwiązanie

Zapisujemy wielomian  $W(x)$  w postaci iloczynowej:

$$W(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \text{ stąd } W(x) = (x - x_1)(x + 2x_1)(x - 5x_1).$$

Przekształcamy wzór wielomianu  $W(x)$  do postaci ogólnej:

$$W(x) = (x - x_1)(x + 2x_1)(x - 5x_1) = (x^2 + x_1x - 2x_1^2)(x - 5x_1) = x^3 - 4x_1x^2 - 7x_1^2x + 10x_1^3.$$

Z równości wielomianów wynika, że  $10x_1^3 = 80$ , stąd  $x_1 = 2$ .

Ostatecznie  $W(x) = x^3 - 8x^2 - 28x + 80$ , stąd  $p = -8, q = -28$ .

##### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 1 p.**

Zapisanie wielomianu  $W(x)$  w postaci  $W(x) = (x - x_1)(x + 2x_1)(x - 5x_1)$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Obliczenie  $x_1 = 2$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Obliczenie  $p = -8, q = -28$ .

#### Zadanie 10. (0–3)

##### Przykładowe rozwiązanie

Zauważamy, że wyraz  $a_n$  ciągu  $(a_n)$  jest sumą  $n + 1$  początkowych kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego  $(b_n)$ , w którym  $b_1 = n, b_{n+1} = 2n$ . Stąd  $a_n = \frac{n+2n}{2}(n+1) = \frac{3}{2}n(n+1)$ . Obliczamy najmniejszy wyraz ciągu  $(a_n)$ , który jest większy od 1890.

$$\frac{3}{2}n(n+1) > 1890$$

$$n^2 + n - 1260 > 0$$

$$\Delta = 5041, \sqrt{\Delta} = 71$$

$$n_1 = \frac{-1-71}{2} = -36, \quad n_2 = \frac{-1+71}{2} = 35$$

$$(n+36)(n-35) > 0$$

Najmniejszy wyraz ciągu  $(a_n)$  większy od 1890 to  $a_{36}$ , zatem obliczamy  $a_{36} = \frac{3}{2} \cdot 36 \cdot 37 = 1998$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 1 p.**

Zauważenie i zapisanie, że  $a_n = \frac{n+2n}{2}(n+1) = \frac{3}{2}n(n+1)$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Obliczenie numeru wyrazu, który jest równy 1890:  $n = 35$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Obliczenie najmniejszego wyrazu ciągu  $(a_n)$  większego od 1890:  $a_{36} = 1998$ .

### Zadanie 11. (0–3)

#### Przykładowe rozwiązanie

Niech przekątna  $AC$  zawiera się w prostej o równaniu  $y = \frac{1}{2}x - 7$ . Wówczas współrzędne punktów  $A$  i  $C$  są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+6)^2 = 20 \\ y = \frac{1}{2}x - 7 \end{cases}.$$

Mamy:

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 20$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 5x + 5 = 20$$

$$x^2 - 4x + 4 = 16$$

$$(x-2)^2 - 4^2 = 0$$

$$x-2-4=0 \quad \vee \quad x-2+4=0$$

$$x=6 \quad \vee \quad x=-2$$

$$\text{Stąd } A = (6, -4), \quad C = (-2, -8).$$

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do  $AB$  takiej, że środek  $S = (2, -6)$  danego okręgu do niej należy.

$y = -2x + b$  i  $S = (2, -6)$  należy do tej prostej, stąd

$$-6 = -2 \cdot 2 + b$$

$$b = -2$$

$$y = -2x - 2.$$

Współrzędne wierzchołków  $B$  i  $D$  są rozwiązaniami układu równań:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+6)^2 = 20 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 16x + 16 - 20 = 0$$

$$5x^2 - 20x = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 4.$$

$$\text{Stąd } B = (0, -2), D = (4, -10).$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp**..... 1 p.

Obliczenie współrzędnych wierzchołków  $A$  i  $C$  kwadratu:  $A = (6, -4)$ ,  $C = (-2, -8)$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 p.

Zapisanie układu równań, którego rozwiązaniem są współrzędne wierzchołków  $B$  i  $D$ :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+6)^2 = 20 \\ y = -2x - 2. \end{cases}$$

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 p.

Obliczenie współrzędnych wierzchołków  $B$  i  $D$ :  $B = (0, -2)$ ,  $D = (4, -10)$ .

### Zadanie 12. (0–3)

#### Przykładowe rozwiązanie

$$\text{Oznaczamy } n = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}}.$$

Ponieważ  $n > 0$ , to

$$n^2 = 30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}}, \text{ a skoro } n = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}}, \text{ mamy } n^2 = 30 + n.$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$\Delta = 1 + 120 = 121$$

$$n_1 = \frac{1-11}{2} = -5$$

$$n_2 = \frac{1+11}{2} = 6$$

Stąd  $n = 6$  (bo  $n > 0$ ). Jest to liczba naturalna, co należało wykazać.

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 p.

Zapisanie równania  $n = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}}$  i zauważenie, że obie jego strony są dodatnie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Podniesienie obu stron równania  $n = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}}$  do kwadratu i zapisanie tego równania w postaci  $n^2 - n - 30 = 0$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Przeprowadzenie pełnego dowodu twierdzenia.

### Zadanie 13. (0–3)

#### Przykładowe rozwiązanie

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do rozważanego trójkąta otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

Dodajemy równości stronami:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc \cos \alpha - 2ac \cos \beta - 2ab \cos \gamma$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos \alpha + 2ac \cos \beta + 2ab \cos \gamma.$$

Ponieważ dla dowolnego  $x$  prawdziwa jest nierówność  $\cos x \leq 1$ , to

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2bc + 2ac + 2ab$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ac + 2ab$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \leq (a + b + c)^2$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} \leq \frac{1}{2} < \frac{3}{4}.$$

To kończy dowód.

#### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zapisanie równości wynikającej z twierdzenia cosinusów:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos \alpha + 2ac \cos \beta + 2ab \cos \gamma.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zauważenie i zapisanie, że z równości  $a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos \alpha + 2ac \cos \beta + 2ab \cos \gamma$  wynika nierówność  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2bc + 2ac + 2ab$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Przeprowadzenie pełnego dowodu twierdzenia.

**Zadanie 14. (0–6)****Przykładowe rozwiązanie**

Następujące równania są równoważne:

$$(3-x) \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = m + \frac{1}{8}$$

$$-(x-3)\sqrt{(2x+1)^2} = m + \frac{1}{8}$$

$$-(x-3)|2x+1| = m + \frac{1}{8}$$

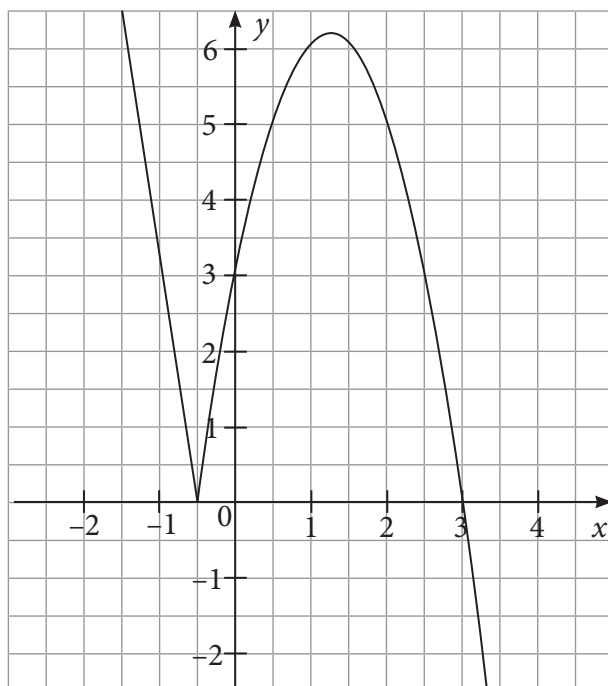
$$-2(x-3)\left|x + \frac{1}{2}\right| = m + \frac{1}{8}.$$

Rozważamy funkcję  $f$  określoną wzorem  $f(x) = -2(x-3)\left|x + \frac{1}{2}\right|$  dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Przekształcamy wzór tej funkcji, stosując definicję wartości bezwzględnej.

$$f(x) = \begin{cases} -2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) & \text{dla } x \geq -\frac{1}{2} \\ 2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) & \text{dla } x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Szkicujemy wykres funkcji  $f$ .



Obliczamy współrzędne  $(x_0, y_0)$  wierzchołka paraboli o równaniu  $y = -2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ .

$$x_0 = \frac{-\frac{1}{2} + 3}{2} = \frac{5}{4} \quad y_0 = -2\left(\frac{5}{4} - 3\right)\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{49}{8}$$

Wierzchołek ma zatem współrzędne  $\left(\frac{5}{4}, \frac{49}{8}\right)$ .



Niech prosta  $l$  ma równanie  $y = m + \frac{1}{8}$ .

Odczytujemy:

gdy  $m + \frac{1}{8} < 0$  lub  $m + \frac{1}{8} > \frac{49}{8}$ , wykres funkcji  $f$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą  $l$ ,

gdy  $m + \frac{1}{8} = 0$  lub  $m + \frac{1}{8} = \frac{49}{8}$ , wykres funkcji  $f$  ma dokładnie dwa punkty wspólne z prostą  $l$ ,

gdy  $0 < m + \frac{1}{8} < \frac{49}{8}$ , wykres funkcji  $f$  ma dokładnie trzy punkty wspólne z prostą  $l$ .

Stąd:

gdy  $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right) \cup \left(6, +\infty\right)$ , równanie  $(3-x) \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = m + \frac{1}{8}$  ma dokładnie jedno rozwiązanie,

gdy  $m = -\frac{1}{8}$  lub  $m = 6$ , równanie  $(3-x) \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = m + \frac{1}{8}$  ma dokładnie dwa rozwiązania,

gdy  $m \in \left(-\frac{1}{8}, 6\right)$ , równanie  $(3-x) \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = m + \frac{1}{8}$  ma dokładnie trzy rozwiązania.

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 p.

Zapisać danego równania w postaci:  $-2\left(x-3\right)\left|x+\frac{1}{2}\right|=m+1$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.

Zapisanie wzoru funkcji  $f$  bez użycia wartości bezwzględnej:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) & \text{dla } x \geq -\frac{1}{2} \\ 2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) & \text{dla } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 4 p.

Naszkicowanie wykresu funkcji  $f$  i odczytanie współrzędnych wierzchołka paraboli

o równaniu  $y = -2\left(x-3\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ :  $W = \left(\frac{5}{4}, \frac{49}{8}\right)$ .

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 5 p.

Odczytanie liczby punktów wspólnych wykresu funkcji  $f$  z prostą  $l$  o równaniu  $y = m + \frac{1}{8}$ :

gdy  $m + \frac{1}{8} < 0$  lub  $m + \frac{1}{8} > \frac{49}{8}$ , wykres funkcji  $f$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą  $l$ ,

gdy  $m + \frac{1}{8} = 0$  lub  $m + \frac{1}{8} = \frac{49}{8}$ , wykres funkcji  $f$  ma dokładnie dwa punkty wspólne z prostą  $l$ ,

gdy  $0 < m + \frac{1}{8} < \frac{49}{8}$ , wykres funkcji  $f$  ma dokładnie trzy punkty wspólne z prostą  $l$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... **6 p.**

Wyznaczenie liczby rozwiązań danego równania w zależności od wartości parametru  $m$ :

gdy  $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right) \cup (6, +\infty)$ , równanie  $(3-x) \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = m + \frac{1}{8}$  ma dokładnie jedno rozwiązanie,

gdy  $m = -\frac{1}{8}$  lub  $m = 6$ , równanie  $(3-x) \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = m + \frac{1}{8}$  ma dokładnie dwa rozwiązania,

gdy  $m \in \left(-\frac{1}{8}, 6\right)$ , równanie  $(3-x) \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = m + \frac{1}{8}$  ma dokładnie trzy rozwiązania.

### Zadanie 15. (0-6)

Uzasadnij, że równanie  $2\cos^3 \frac{x}{2} = 3\cos \frac{x}{2} - 1$  ma w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  dokładnie dwa rozwiązania.

### Przykładowe rozwiązanie

Niech  $\cos \frac{x}{2} = a$ . Wówczas

$$-2a^3 + 3a - 1 = 0$$

$$-3a^3 + 3a + a^3 - 1 = 0$$

$$-3a(a-1)(a+1) + (a-1)(a^2 + a + 1) = 0$$

$$(a-1)(-3a^2 - 3a + a^2 + a + 1) = 0$$

$$(a-1)(-2a^2 - 2a + 1) = 0$$

$$a_1 = 1 \vee -2a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$\Delta = 12, \quad a_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad a_3 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Ponieważ  $a_3 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1$ , równanie  $\cos \frac{x}{2} = a_3$  nie ma rozwiązania.

Rozwiązujemy równanie:

$$\cos \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}$$

$$x = 4k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}.$$

Zatem w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  ma ono jedno rozwiązanie:  $x = 0$ .

Równanie  $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$  ma w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  dokładnie jedno rozwiązanie, ponieważ

funkcja  $f$  określona wzorem  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$  jest w tym przedziale malejąca i przyjmuje wszystkie

wartości z przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ , a więc i wartość  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .

Zatem równanie  $2\cos^3 \frac{x}{2} = 3\cos \frac{x}{2} - 1$  ma w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  dokładnie dwa rozwiązania.

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 p.

Zapisanie danego równania w postaci równania wielomianowego i obliczenie jednego z pierwiastków tego równania:  $-2a^3 + 3a - 1 = 0$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 3 p.

Zapisanie danego równania w postaci równania wielomianowego i obliczenie trzech pierwiastków

tego równania:  $-2a^3 + 3a - 1 = 0$ :  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ,  $a_3 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 4 p.

Obliczenie pierwiastka równania  $\cos \frac{x}{2} = 1$  o niewiadomej z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 5 p.

Zapisanie, że równanie  $\cos \frac{x}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$  nie ma rozwiązania wraz z uzasadnieniem.

**Rozwiązanie pełne** ..... 6 p.

Uzasadnienie, że równanie  $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$  ma w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  dokładnie jedno

rozwiązanie, i stwierdzenie, że równanie  $2\cos^3 \frac{x}{2} = 3\cos \frac{x}{2} - 1$  ma w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  dokładnie dwa rozwiązania.

### Zadanie 16. (0–6)

#### Przykładowe rozwiązanie

Iloraz ciągu  $(a_n)$  oznaczamy literą  $q$ .

Zapisujemy równanie wynikające z warunku, że w ciągu  $(a_n)$  suma wszystkich wyrazów o numerach parzystych jest szesnaście razy mniejsza od sumy wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15} = 16 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{16})$$

Ciąg  $(a_n)$  jest geometryczny, stąd

$$a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^4 + \dots + a_1 q^{14} = 16 \cdot (a_1 q + a_1 q^3 + a_1 q^5 + \dots + a_1 q^{15})$$

$$a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^4 + \dots + a_1 q^{14} = 16 \cdot q (a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^4 + \dots + a_1 q^{14}).$$

Ponieważ ciąg  $(a_n)$  ma wszystkie wyrazy dodatnie, wynika stąd, że  $a_1 \neq 0$  i  $q \neq 0$ .

Zatem  $16q = 1$

$$q = \frac{1}{16}.$$

Ponieważ spełniona jest równość

$$\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_{16} = 32, \text{ to}$$

$$\log_2 (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{16}) = 32$$

$$\log_2 (a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \dots \cdot a_1 q^{15}) = 32$$

$$\log_2 (a_1^{16} \cdot q^{1+2+3+\dots+15}) = 32$$

$$\log_2 \left( a_1^{16} \cdot q^{\frac{1+15}{2} \cdot 15} \right) = 32$$

$$\log_2 (a_1^{16} \cdot q^{8 \cdot 15}) = 32.$$

Podstawiamy obliczoną wcześniej wartość  $q$ . Mamy więc

$$\log_2 \left( a_1^{16} \cdot \left( \frac{1}{16} \right)^{8 \cdot 15} \right) = 32$$

$$\log_2 (a_1^{16} \cdot 2^{-4 \cdot 8 \cdot 15}) = 32$$

$$16 \log_2 a_1 - 32 \cdot 15 \log_2 2 = 32$$

$$\log_2 a_1 - 30 = 2$$

$$\log_2 a_1 = 32$$

$$a_1 = 2^{32}.$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 p.

Zapisanie równania:  $a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^4 + \dots + a_1 q^{14} = 16 \cdot (a_1 q + a_1 q^3 + a_1 q^5 + \dots + a_1 q^{15})$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.

Wyznaczenie ilorazu ciągu  $(a_n)$ :  $q = \frac{1}{16}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 4 p.

Zapisanie równania:  $\log_2 (a_1^{16} \cdot q^{8 \cdot 15}) = 32$ .

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 5 p.

Zapisanie równania:  $16 \log_2 a_1 - 32 \cdot 15 \log_2 2 = 32$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 6 p.

Obliczenie wyrazu pierwszego ciągu  $(a_n)$ :  $a_1 = 2^{32}$ .

**Zadanie 17. (0–7)****Przykładowe rozwiązanie**

Przyjmujemy oznaczenia:  $x$  – długość boku kwadratu,  $r$  – długość promienia koła.

$$2\pi r + 4x = 18, \text{ stąd } x = \frac{9 - \pi r}{2}.$$

Niech  $P$  oznacza sumę pól koła i kwadratu.

Wówczas  $P = \pi r^2 + x^2$ . Zapisujemy  $P$  jako funkcję jednej zmiennej  $r$ .

$$P(r) = \pi r^2 + \left(\frac{9 - \pi r}{2}\right)^2 = \pi r^2 + \frac{81 - 18\pi r + \pi^2 r^2}{4} = \frac{1}{4}[(4\pi + \pi^2)r^2 - 18\pi r + 81]$$

Określamy dziedzinę funkcji  $P$ . Ponieważ  $r > 0$  oraz  $\frac{9 - \pi r}{2} > 0$ , to  $r \in \left(0, \frac{9}{\pi}\right)$ .

Funkcja  $P$  jest zawężeniem funkcji kwadratowej  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , gdzie

$$\left(a = \frac{4\pi + \pi^2}{4}, b = -\frac{18\pi}{4}, c = \frac{81}{4}\right), \text{ do przedziału } \left(0, \frac{9}{\pi}\right).$$

Ponieważ  $a = \frac{4\pi + \pi^2}{4} > 0$ , to funkcja  $g$  przyjmuje wartość najmniejszą dla  $r = -\frac{b}{2a}$ .

Obliczamy  $r = -\frac{b}{2a}$ .

$$r = \frac{\frac{18\pi}{4}}{2 \cdot \frac{4\pi + \pi^2}{4}} = \frac{9}{4 + \pi}$$

Sprawdzamy, czy  $\frac{9}{4 + \pi} \in \left(0, \frac{9}{\pi}\right)$ . Liczba  $\frac{9}{4 + \pi}$  jest dodatnia oraz ponieważ ma mianownik

wiekszy niż mianownik liczby  $\frac{9}{\pi}$ , jest od tej liczby mniejsza.

Wynika stąd, że dla  $r = \frac{9}{4 + \pi}$  funkcja  $P$  osiąga wartość najmniejszą.

Obliczamy dla  $r = \frac{9}{4 + \pi}$  długość boku kwadratu oraz sumę pól koła i kwadratu.

$$x = \frac{9 - \frac{9\pi}{4 + \pi}}{2} = \frac{36 + 9\pi - 9\pi}{2(4 + \pi)} = \frac{18}{4 + \pi}$$

$$P = \pi \left(\frac{9}{4 + \pi}\right)^2 + \left(\frac{18}{4 + \pi}\right)^2 = \frac{81\pi + 324}{(4 + \pi)^2}$$

**Schemat oceniania****Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.**

a) Pierwszy etap składa się z trzech części:

- zapisanie związku długości promienia koła z długością boku kwadratu:  $x = \frac{9 - \pi r}{2}$ ,
- zdefiniowanie funkcji zmiennej  $r$  lub  $x$  opisującej sumę pól koła i kwadratu, np.  

$$P(r) = \frac{1}{4}[(4\pi + \pi^2)r^2 - 18\pi r + 81],$$
- określenie dziedziny funkcji  $P$ :  $r \in \left(0, \frac{9}{\pi}\right)$ .

Zdający otrzymuje **2 punkty** za poprawne zdefiniowanie funkcji zmiennej  $r$  lub  $x$  opisującej sumę pól koła i kwadratu, trzeci punkt otrzymuje za określenie dziedziny funkcji  $P$ .

b) Drugi etap składa się z trzech części:

- wyznaczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji  $g$ :  

$$r = \frac{9}{4 + \pi},$$
- sprawdzenie, czy  $\frac{9}{4 + \pi} \in \left(0, \frac{9}{\pi}\right)$ ,
- obliczenie długości boku kwadratu:  $x = \frac{18}{4 + \pi}$ .

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część tego etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap.

Obliczenie najmniejszej wartości sumy pól koła i kwadratu:  $\frac{81\pi + 324}{(4 + \pi)^2}$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.