PRÓBNA MATURA z WSiP

Egzamin maturalny z matematyki dla klasy 3

Poziom rozszerzony

Luty 2018

Zasady oceniania zadań

Kartoteka

Numer zadania	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe Uczeń:	Maksymalna liczba punktów
1	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów (7.5r)	1
2	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \lvert f(x) \rvert$ (4.1r)	1
3	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	stosuje wzory Viète’a (3.1r)	1
4	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym (5.1r)	1
5	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	oblicza pochodne funkcji wymiernych (11.2r)	1
6	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	oblicza granice funkcji (11.1r)	2
7	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	oblicza granice funkcji (11.1r)	2
8	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	oblicza prawdopodobieństwo warunkowe (10.2r)	2
9	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	stosuje wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (5.3p)	3
10	V. Rozumowanie i argumentacja	stosuje wzory Viète’a (3.1r)	3
11	IV. Użycie i tworzenie strategii	stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów (6.5r)	3
12	IV. Użycie i tworzenie strategii	rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności (7.4r)	3
13	IV. Użycie i tworzenie strategii	posługuje się równaniem okręgu (8.5r)	6
14	V. Rozumowanie i argumentacja	rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem (3.2r)	5
15	IV. Użycie i tworzenie strategii	stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6p)	5
16	IV. Użycie i tworzenie strategii	oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3p)	5
17	III. Modelowanie matematyczne	stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (11.6r)	7

Schemat oceniania zadań zamkniętych

Numer zadania	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Poprawna odpowiedź	B	C	B	D	D	A
Punktacja	0–1	0–1	0–1	0–1	0–1	0–1

Za każdą poprawną odpowiedź – **1 punkt**.

Schemat oceniania zadań z kodowaną odpowiedzią

Numer zadania	**7**	**8**
Poprawna odpowiedź	714	142
Punktacja	0–2	0–2

Za każde poprawne zakodowanie liczby – **2 punkty**.

Zadanie 7. (0–2)

<u>Przykładowe rozwiązanie</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1+2x+5x^2}{7x^2-3}-\frac{23x+12}{7x^2+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+2x+5x^2}{7x^2-3}-\lim_{x\to\infty}\frac{23x+12}{7x^2+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x}+5}{7-\frac{3}{x^2}}-\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{23}{x}+\frac{12}{x^2}}{7+\frac{3}{x^2}}=\frac{5}{7}-0=0{,}714285\ldots$$

Należy zakodować kolejno cyfry 7, 1, 4.

Zadanie 8. (0–2)

<u>Przykładowe rozwiązanie</u>

Wszystkie wyniki tego doświadczenia losowego są jednakowo prawdopodobne i jest ich 2^6, czyli 64.

Niech A oznacza zdarzenie – orzeł nie wypadł ani razu, a B zdarzenie – reszka wypadła więcej niż cztery razy.

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{64},\ P(B)=\frac{7}{64}$$

Zatem $P(A\,|\,B)=\dfrac{\frac{1}{64}}{\frac{7}{64}}=\dfrac{1}{7}=0{,}14285$.

Należy zakodować kolejno cyfry 1, 4, 2.

Schemat oceniania zadań otwartych

UWAGA OGÓLNA

- Za prawidłowe rozwiązanie zadania inną metodą niż przewidziana w schemacie punktowania należy przyznać zdającemu maksymalną liczbę punktów.
- Za częściowe rozwiązanie zadania inną metodą niż przewidziana w schemacie rozwiązania należy przyznać zdającemu liczbę punktów adekwatną do wykonanych czynności.

Zadanie 9. (0–3)

Przykładowe rozwiązanie

Oznaczamy różnicę ciągu (a_n) przez r. Wówczas $S_n = \frac{2018+2018+(n-1)r}{2}\cdot n$

Ponieważ $S_n = 0$, to $\frac{2018+2018+(n-1)r}{2}\cdot n = 0$.

Z warunków zadania $a_1 \neq 0$ wynika, że n musi być liczbą naturalną większą niż 1.

Zatem równanie $\frac{2018+2018+(n-1)r}{2}\cdot n = 0$ jest równoważne równaniu

$\frac{2018+2018+(n-1)r}{2} = 0$.

Stąd wyznaczamy różnicę ciągu (a_n).

$(n-1)r = -4036$

$r = -\frac{4036}{n-1}$

Wyznaczamy wzór na sumę S_{2n} wszystkich $2n$ początkowych wyrazów ciągu (a_n).

$$S_{2n} = \frac{2018+2018+(2n-1)r}{2}\cdot 2n$$

$$S_{2n} = \left(4036+(2n-1)\cdot\left(-\frac{4036}{n-1}\right)\right)\cdot n$$

$$S_{2n} = \frac{4036n-4036-8072n+4036}{n-1}\cdot n$$

$$S_{2n} = -\frac{4036n^2}{n-1}$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ………………………………………… 1 punkt.

Zapisanie równania wynikającego z warunku $S_n = 0$: $\frac{2018+2018+(n-1)r}{2}\cdot n = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania …..……………………………………… 2 punkty.

Wyznaczenie różnicy ciągu (a_n): $r = -\frac{4036}{n-1}$.

Rozwiązanie pełne ………………………………………………………………………… 3 punkty.

Wyznaczenie wzoru na sumę S_{2n}: $S_{2n} = -\frac{4036n^2}{n-1}$.

Zadanie 10. (0–3)

Przykładowe rozwiązanie

Podstawiamy t za x^2. Z założenia dane równanie ma cztery różne rozwiązania, stąd równanie $\frac{1}{4}t^2+\left(b-1\right)t+b^2=0$ ma dwa różne dodatnie rozwiązania rzeczywiste. Oznaczamy je jako t_1 oraz t_2. Rozwiązania równania $\frac{1}{4}x^4+\left(b-1\right)x^2+b^2=0$ są zatem równe:

$\sqrt{t_1}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, -\sqrt{t_2}$.

Obliczamy iloczyn tych rozwiązań.

$$\sqrt{t_1}\cdot\left(-\sqrt{t_1}\right)\cdot\sqrt{t_2}\cdot\left(-\sqrt{t_2}\right)=t_1\cdot t_2$$

Na podstawie wzorów Viète'a dla równania $\frac{1}{4}t^2+\left(b-1\right)t+b^2=0$ otrzymujemy

$t_1\cdot t_2=\dfrac{b^2}{\frac{1}{4}}=4b^2$, co należało udowodnić.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 punkt.

Zapisanie danego równania po podstawieniu $x^2 = t$ w postaci $\frac{1}{4}t^2+\left(b-1\right)t+b^2=0$ i ustalenie, że otrzymane równanie o niewiadomej t ma dwa różne dodatnie rozwiązania.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ….. 2 punkty.

Zapisanie wszystkich rozwiązań równania $\frac{1}{4}x^4+\left(b-1\right)x^2+b^2=0$ w zależności od t oraz ich iloczynu: $\sqrt{t_1}\cdot\left(-\sqrt{t_1}\right)\cdot\sqrt{t_2}\cdot\left(-\sqrt{t_2}\right)=t_1\cdot t_2$.

Rozwiązanie pełne .... 3 punkty.

Zastosowanie wzorów Viète'a i uzasadnienie tezy twierdzenia.

Zadanie 11. (0–3)

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ:

$$\cos x+\sin 3x=0$$

$$\cos x+\sin 3x=\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$$

$$\cos x+\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=2\cos\left(\frac{x+\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}{2}\right)$$

zatem równanie $\cos x+\ \sin 3x=0$ jest równoważne równaniom:

$$2\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}-3x}{2}\cdot\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+3x}{2}=0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Stąd

$\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ lub $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą,

$x=-\frac{\pi}{4}-k\pi$ lub $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zatem uwzględniając warunek, że rozwiązania mają należeć do przedziału $\langle\pi;2\pi\rangle$, otrzymujemy: $x=\frac{7}{4}\pi$ lub $x=\frac{11}{8}\pi$, lub $x=\frac{15}{8}\pi$.

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 punkt.

Zapisanie danego równania w postaci zawierającej tylko jeden rodzaj funkcji trygonometrycznych: $\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ….................................... 2 punkty.

Zapisanie lewej strony równania $\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=0$ w postaci iloczynu i rozwiązanie jednego z równań: $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$ lub $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ dla wszystkich liczb rzeczywistych (lub w przedziale $\langle\pi;2\pi\rangle$): np. $x=-\frac{\pi}{4}-k\pi$ lub $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in C$.

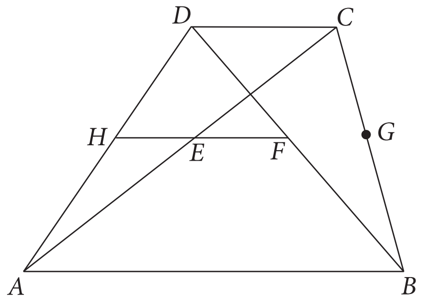
Rozwiązanie pełne .... 3 punkty.

Rozwiązanie danego równania o niewiadomej z przedziału $\langle\pi;2\pi\rangle$: $x=\frac{7}{4}\pi$ lub $x=\frac{11}{8}\pi$, lub $x=\frac{15}{8}\pi$.

Zadanie 12. (0–3)

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, na którym E jest środkiem przekątnej AC, F jest środkiem przekątnej BD trapezu $ABCD$, G jest środkiem ramienia BC.
Rozpatrując trójkąty ABC, BCD i korzystając z założeń, uzyskujemy, na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, że $EF \parallel AB$.



Wybieramy na ramieniu AD trapezu punkt H taki, że punkty E, F i H są współliniowe. Punkt H jest zatem środkiem boku AD na podstawie twierdzenia Talesa. Z twierdzenia o linii środkowej trójkąta, zastosowanego do trójkąta ACD, mamy $|EH| = \frac{1}{2}|CD|$. Podobnie w trójkącie ABD mamy $|FH| = \frac{1}{2}|AB|$. Zatem $|EF| = |FH| - |EH| = \frac{1}{2}|AB| - \frac{1}{2}|CD| = \frac{|AB| - |CD|}{2}$, co należało wykazać.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp……………………………………........….. 1 punkt.

Wybór punktu H: punkt H na ramieniu AD trapezu taki, że punkty E, F i H są współliniowe, oraz uzasadnienie, że $EF \parallel AB$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania …..……………………………........…. 2 punkty.

Zapisanie warunków $|EH| = \frac{1}{2}|CD|$ oraz $|FH| = \frac{1}{2}|AB|$.

Rozwiązanie pełne ………………………………………………………………...… 3 punkty.

Przeprowadzenie pełnego dowodu twierdzenia.

Zadanie 13. (0–6)

Przykładowe rozwiązanie

Niech środek szukanego okręgu ma współrzędne $S = (x, y)$. Ponieważ $|SA| = |SC|$, to
$(x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2$, stąd

$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$

$8x - 2y + 17 = -4x + 2y + 5$

$4y = 12x + 12$

$y = 3x + 3$

$y = 3x + 3$. **(1)**.

Przekształcamy równanie prostej l do postaci ogólnej i otrzymujemy $3x+2y-1=0$.

Wówczas $d(l,S)=\frac{|3x+2y-1|}{\sqrt{13}}$, a ponieważ z założenia $d(l,S)=\sqrt{13}$, to

$$\frac{|3x+2y-1|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

$$|3x+2y-1|=13.$$

Ostatnie równanie jest równoważne alternatywom:

$3x+2y-1=13$ lub $3x+2y-1=-13$,

$3x+2y=14$ lub $3x+2y=-12$. **(2)**

Z warunków (1) i (2) otrzymujemy:

$$\begin{cases}3x+2y=14\\ y=3x+3\end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases}3x+2y=-12\\ y=3x+3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{8}{9}\\ y=\frac{17}{3}\end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases}$$

Ostatecznie $S=(-2,-3)$, bo współrzędne punktu S, zgodnie z warunkami zadania, mają być ujemne.

Obliczamy długość promienia szukanego okręgu.

$$r=|SA|=\sqrt{(-4+2)^2+(1+3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

Zatem równaniem rozważanego okręgu jest: $(x+2)^2+(y+3)^2=20$.

Niech szukany punkt B ma współrzędne (x_B, y_B).

Zauważamy, że aby trójkąt ABC był prostokątny, kąt prosty może być tylko przy wierzchołku A lub C (gdyby kąt prosty był przy wierzchołku B, odcinek AC byłby średnicą okręgu, a $|AC|\neq 4\sqrt{5}$).

Gdy kąt prosty w trójkącie ABC będzie przy wierzchołku A, to punkt S jest środkiem odcinka BC. Stąd

$$-2=\frac{x_B+2}{2},\quad -3=\frac{y_B-1}{2}$$

$$x_B=-6,\quad y_B=-5.$$

Analogicznie, gdy kąt prosty w trójkącie ABC będzie przy wierzchołku C, to punkt S jest środkiem odcinka BA. Stąd

$$-2=\frac{x_B-4}{2},\quad -3=\frac{y_B+1}{2}$$

$$x_B=0,\quad y_B=-7.$$

Są zatem dwa punkty spełniające warunki zadania: $B_1=(-6,-5)$ oraz $B_2=(0,-7)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ……………………………………………………………………………….. 1 punkt.
Zapisanie równania wynikającego z warunku, że odcinki SA i SC są promieniami szukanego okręgu: $(x+4)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y+1)^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ………………………………………… 2 punkty.
Zapisanie równania wynikającego z warunku, że środek szukanego okręgu jest oddalony o $\sqrt{13}$ od prostej l o równaniu $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$: $|3x+2y-1|=13$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania …..……………………………………… 3 punkty.
Obliczenie współrzędnych środka danego okręgu w obu przypadkach: $S=\left(\frac{8}{9},\frac{17}{3}\right)$ oraz $S=(-2,-3)$.

Rozwiązanie prawie pełne ….………………………………………..……….. 4 punkty.
Wybór współrzędnych środka okręgu spełniającego warunki zadania i zapisanie równania szukanego okręgu: $(x+2)^2+(y+3)^2=20$.

Rozwiązanie pełne ….…………………………………………………………….. 6 punktów.
Wyznaczenie współrzędnych obu punktów leżących na tym okręgu takich, że trójkąt ABC jest prostokątny: $B_1=(-6,-5)$ oraz $B_2=(0,-7)$.

Zadanie 14. (0–5)

Przykładowe rozwiązanie

$$(x-2)\sqrt{2+2x+\frac{1}{2}x^2}=m$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(x-2)\sqrt{(x+2)^2}=m$$

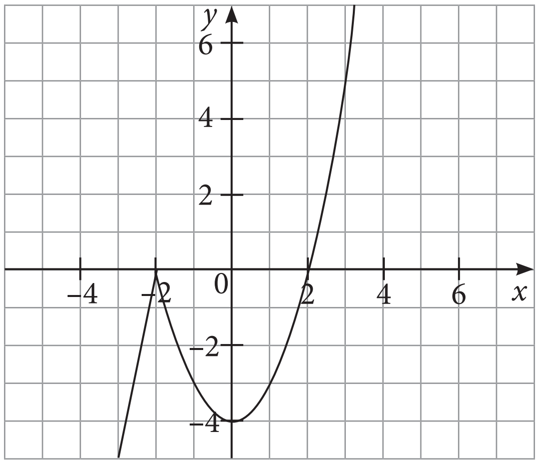
$$\sqrt{\frac{1}{2}}(x-2)|x+2|=m$$

$$(x-2)|x+2|=\sqrt{2}\cdot m$$

Rozważamy funkcję f określoną wzorem $f(x)=(x-2)|x+2|$ dla $x\in R$. Przekształcamy wzór tej funkcji, stosując definicję wartości bezwzględnej.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{dla } x\geq -2 \\ -x^2+4 & \text{dla } x<-2 \end{cases}$$

Szkicujemy wykres funkcji *f*.



Niech prosta *l* ma równanie $y = \sqrt{2}m$.

Odczytujemy:

gdy $\sqrt{2}m < -4$ lub $\sqrt{2}m > 0$, wykres funkcji *f* ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą *l*,

gdy $\sqrt{2}m = 0$ lub $\sqrt{2}m = -4$, wykres funkcji *f* ma dokładnie dwa punkty wspólne z prostą *l*,

gdy $-4 < \sqrt{2}m < 0$, wykres funkcji *f* ma dokładnie trzy punkty wspólne z prostą *l*.

Stąd:

- gdy $m \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(0; +\infty\right)$, równanie $\left(x-2\right)\sqrt{2+2x+\frac{1}{2}x^2} = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- gdy $m = 0$ lub $m = -2\sqrt{2}$, równanie $\left(x-2\right)\sqrt{2+2x+\frac{1}{2}x^2} = m$ ma dokładnie dwa rozwiązania,
- gdy $m \in \left(-2\sqrt{2}; 0\right)$, równanie $\left(x-2\right)\sqrt{2+2x+\frac{1}{2}x^2} = m$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

__Schemat oceniania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ……………………………………………………………………………….. 1 punkt.

Zapisane danego równania w postaci: $\left(x-2\right)\left|x+2\right| = \sqrt{2}\cdot m$ (lub $\sqrt{\frac{1}{2}}\left(x-2\right)\left|x+2\right| = m$).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………………………. 2 punkty.

Zapisanie wzoru $f\left(x\right) = \left(x-2\right)\left|x+2\right|$ funkcji *f*, bez użycia wartości bezwzględnej:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \geq -2 \\ -x^2 + 4 & \text{dla } x < -2. \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania …..……………………………………. 3 punkty.

Naszkicowanie wykresu funkcji *f*.

Rozwiązanie prawie pełne …..…………………………………………………..……….. 4 punkty.
Odczytanie liczby punktów wspólnych wykresu funkcji *f* z prostą *l* o równaniu $y=\sqrt{2}m$:
gdy $\sqrt{2}m<-4$ lub $\sqrt{2}m>0$, wykres funkcji *f* ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą *l*,
gdy $\sqrt{2}m=0$ lub $\sqrt{2}m=-4$, wykres funkcji *f* ma dokładnie dwa punkty wspólne z prostą *l*,
gdy $-4<\sqrt{2}m<0$, wykres funkcji *f* ma dokładnie trzy punkty wspólne z prostą *l*.

Rozwiązanie pełne …..……………………………………………………………….. 5 punktów.
Wyznaczenie liczby rozwiązań danego równania w zależności od wartości parametru *m*:

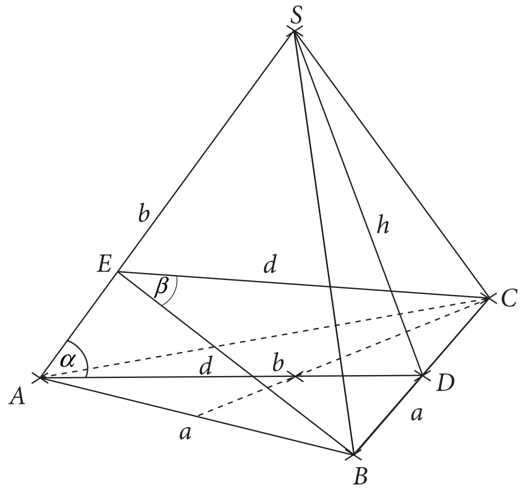
gdy $m\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(0;+\infty\right)$, równanie $(x-2)\sqrt{2+2x+\frac{1}{2}x^2}=m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie,

gdy $m=0$ lub $m=-2\sqrt{2}$, równanie $(x-2)\sqrt{2+2x+\frac{1}{2}x^2}=m$ ma dokładnie dwa rozwiązania,

gdy $m\in\left(-2\sqrt{2};0\right)$, równanie $(x-2)\sqrt{2+2x+\frac{1}{2}x^2}=m$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

Zadanie 15. (0–5)

Przykładowe rozwiązanie
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ $|AD|=b$ jest długością wysokości podstawy, to $b=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trójkąt *ADS* jest równoramienny, o kącie między ramionami o mierze α. Z twierdzenia cosinusów dla tego trójkąta mamy

$h^2=b^2+b^2-2b^2\cos\alpha$, stąd

$h^2=\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}a^2\cos\alpha$, zatem $h=\sqrt{\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}a^2\cos\alpha}$.

Zauważamy, że $d=|BE|=|CE|$ jest długością wysokości trójkątów *ABS* i *ACS* poprowadzonych do krawędzi bocznej *AS* ostrosłupa.

Ponieważ trójkąty *ACS* i *BCS* są przystające, zatem ich pola są równe. Stąd

$\frac{1}{2}bd=\frac{1}{2}ah$ oraz

$$d=\frac{a\sqrt{\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}a^2\cos\alpha}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}a^2\cos\alpha}.$$

Cosinus kąta między ścianami bocznymi ostrosłupa wyznaczymy, zapisując twierdzenie cosinusów dla trójkąta *BCE*:

$a^2=d^2+d^2-2d^2\cos\beta$,

$$\cos\beta=\frac{2d^2-a^2}{2d^2}$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{8}{3}\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{2}a^2\cos\alpha\right)-a^2}{\frac{8}{3}\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{2}a^2\cos\alpha\right)}$$

$$\cos\beta=\frac{4(1-\cos\alpha)-1}{4(1-\cos\alpha)}$$

$$\cos\beta=\frac{3-4\cos\alpha}{4-4\cos\alpha}.$$

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 punkt.

Wyznaczenie b – długości krawędzi bocznej w zależności od a – długości krawędzi podstawy: $b=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 punkty.

Wyznaczenie długości wysokości ściany bocznej w zależności od długości krawędzi podstawy i cosinusa kąta β: $h=\sqrt{\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}a^2\cos\alpha}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 punkty.

Zapisanie równości $\frac{1}{2}bd=\frac{1}{2}ah$ wynikającej z równoważności pól trójkątów *BSC* i *ACS*.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 punkty.

Wyznaczenie długości wysokości trójkątów *ABS* i *ACS* prostopadłych do *AS*:

$$d=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}a^2\cos\alpha}.$$

Rozwiązanie pełne .... 5 punktów.

Obliczenie cosinusa kąta między ścianami bocznymi tego ostrosłupa: $\cos\beta=\frac{3-4\cos\alpha}{4-4\cos\alpha}$.

Zadanie 16. (0–5)

Przykładowe rozwiązanie

$\Omega = \left\{ \left(x_1, x_2, ..., x_n \right) : x_i \in \left\{ 1, 2, ..., 11 \right\} \text{ dla } i = 1, 2, ..., n \right\}$

$\left| \Omega \right| = 11^n$

Przyjmujemy oznaczenia:

A – iloczyn liczb na wylosowanych kulach jest podzielny przez 22

A' – iloczyn liczb na wylosowanych kulach nie jest podzielny przez 22

B – kula o numerze 11 nie została wylosowana

C – żadna z wylosowanych kul nie ma numeru parzystego.

Wówczas

$A' = B \cup C$.

$$P\left(A'\right) = P\left(B \cup C\right) = P\left(B\right) + P\left(C\right) - P\left(B \cap C\right)$$

$P\left(B\right) = \dfrac{10^n}{11^n}$, $P\left(C\right) = \dfrac{6^n}{11^n}$, $P\left(B \cap C\right) = \dfrac{5^n}{11^n}$, stąd

$$P\left(A'\right) = \frac{10^n}{11^n} + \frac{6^n}{11^n} - \frac{5^n}{11^n} = \frac{10^n + 6^n - 5^n}{11^n}.$$

Zatem

$$P\left(A\right) = 1 - \frac{10^n + 6^n - 5^n}{11^n} = \frac{11^n - 10^n - 6^n + 5^n}{11^n}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 punkt.

Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników losowania opisanego w zadaniu: $\left|\Omega\right| = 11^n$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 punkty.

Zapisanie, że zdarzenie polegające na tym, iż iloczyn liczb na wylosowanych kulach nie jest podzielny przez 22, jest sumą zdarzenia: kula o numerze 11 nie została wylosowana oraz zdarzenia: żadna z wylosowanych kul nie ma numeru parzystego.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ….. 3 punkty.

Obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń kula o numerze 11 nie została wylosowana oraz żadna z wylosowanych kul nie ma numeru parzystego: $P\left(B\right) = \dfrac{10^n}{11^n}$, $P\left(C\right) = \dfrac{6^n}{11^n}$.

Rozwiązanie prawie pełne ….. 4 punkty.

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia polegające na tym, że iloczyn liczb na wylosowanych kulach nie jest podzielny przez 22: $P\left(A'\right) = \dfrac{10^n + 6^n - 5^n}{11^n}$.

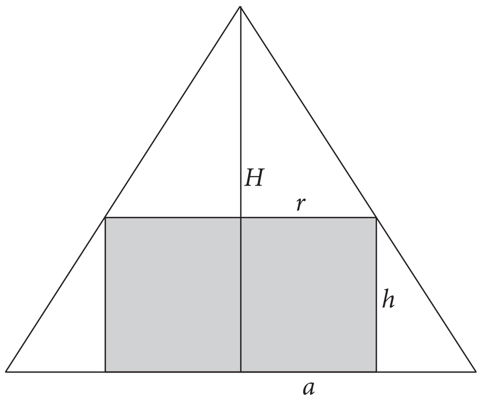
Rozwiązanie pełne …... 5 punktów.

Obliczenie prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn liczb na wylosowanych kulach jest podzielny przez 22: $P\left(A\right) = \dfrac{11^n - 10^n - 6^n + 5^n}{11^n}$.

Zadanie 17. (0–7)

Przykładowe rozwiązanie

Zauważamy, że przy ustalonej wysokości walca największą objętość będzie miał ten walec, który jest styczny do ścian bocznych ostrosłupa. Warto zatem rozważać tylko takie walce.



Niech r oznacza długość promienia walca, gdzie $r \in (0; a)$, a h oznacza wysokość walca. Wówczas $\frac{H}{a} = \frac{h}{a-r}$, stąd $h = \frac{H(a-r)}{a}$.

Wyznaczamy objętość walca:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{H(a-r)}{a} = -\frac{\pi H}{a} r^3 + \pi H r^2.$$

Należy obliczyć, dla jakiego $r \in (0; a)$ funkcja V określona wzorem $V(r) = -\frac{\pi H}{a} r^3 + \pi H r^2$ przyjmuje wartość największą.

Wyznaczamy pochodną funkcji V:

$$V'(r) = -3\frac{\pi H}{a} r^2 + 2\pi H r = -\pi H r\left(\frac{3}{a} r - 2\right).$$

Następnie obliczamy jej miejsca zerowe:

$$V'(r) = 0$$

$$-\pi H r\left(\frac{3}{a} r - 2\right) = 0$$

$$r = 0 \quad \text{lub} \quad r = \frac{2}{3}a.$$

Zatem jedynym argumentem „podejrzanym” o ekstremum lokalne w rozważanym przedziale jest $r = \frac{2}{3}a$.

Ponieważ $V'(r) > 0$ dla $r \in \left(0; \frac{2}{3}a\right)$ oraz $V'(r) < 0$ dla $r \in \left(\frac{2}{3}a; a\right)$, więc w przedziale $\left(0; \frac{2}{3}a\right\rangle$ funkcja V jest rosnąca i w przedziale $\left\langle \frac{2}{3}a; a\right)$ funkcja V jest malejąca.

Stąd wynika, że w punkcie $r = \frac{2}{3}a$ funkcja V przyjmuje wartość największą.

Obliczamy wysokość i objętość walca, który ma największą objętość:

$$h = \frac{H\left(a - \frac{2}{3}a\right)}{a} = \frac{1}{3}H$$

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{2}{3}a\right)^2 \cdot \frac{1}{3}H = \frac{4}{27}\pi a^2 H.$$

Największą objętość równą $\frac{4}{27}\pi a^2 H$ ma walec o promieniu podstawy długości $r = \frac{2}{3}a$ i wysokości $h = \frac{1}{3}H$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap składa się z trzech części:

- zapisanie związku między wysokością walca i długością promienia podstawy walca, wysokości ostrosłupa i długością krawędzi podstawy ostrosłupa: $\frac{H}{a} = \frac{h}{a-r}$,
- zdefiniowanie funkcji zmiennej r lub h opisującej objętość walca, np. $V(r) = -\frac{\pi H}{a}r^3 + \pi H r^2$,
- określenie dziedziny funkcji V: $r \in (0;\ a)$.

Zdający otrzymuje **2 punkty** za poprawne zdefiniowanie funkcji zmiennej r lub h opisującej objętość walca, trzeci punkt otrzymuje za określenie dziedziny funkcji V.

b) Drugi etap składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji V: $V'(r) = -\pi H r\left(\frac{3}{a}r - 2\right)$,
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji V w przedziale $(0; a)$: $r = \frac{2}{3}a$,
- wyznaczenie przedziałów monotoniczności funkcji V, gdy $r \in (0; a)$, i uzasadnienie, że w punkcie $r = \frac{2}{3}a$ funkcja V osiąga wartość największą.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część tego etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap.

Obliczenie wysokości i objętości tego walca, który ma największą objętość: $h = \frac{1}{3}H$ oraz $V = \frac{4}{27}\pi a^2 H$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.